SOCIETY. INTEGRATION. EDUCATION
Proceedings of the International Scientific Conference. Volume II, May 27th - 28th, 2016. 330-342

PAMATJĒDZIENU IZPRATNE SKOLAS MATEMĀTIKAS KOMPETENČU APGUVĒ

Understanding of Basic Concepts for Mastering competences of School Mathematics

Anita Sondore

Elfrīda Krastiņa

Pēteris Daugulis

Elga Drelinga
Daugavpils Universitāte, Latvija

Abstract. *Mathematical competence as a universal and fundamental competence is essential for everyone as a problem solving and life quality improving tool. It is also essential for future teachers who will implement competence based teaching processes starting from elementary schools and preschools. The goal of this research is to discuss typical errors about certain basic mathematical concepts which are taught in school. Failure to grasp these concepts cause problems for learning subsequent mathematics courses and dealing with practical problems. This research will help to improve studies at university level. Experience analysis of university educators related to oral and written answers of students in tests is used in this research. Observations show that many errors get repeated year by year.*
Keywords: *competence approach, concept understanding, mathematical competence, typical errors.*

Ievads
Introduction

Lai nodrošinātu ilgtspējīgu attīstību uz zināšanām, prasmēm un inovācijām vērstu ekonomiku, arvien lielāka nozīme ir pamatkompetencēm. Kā atzīmē vairāki autori "ilgtspējība raksturo gan ilgtspējīgas attīstības rezultātu, gan ceļa meklējumus tādai dzīvei un darbībai, lai nodrošinātu augstu pašreizējās dzīves kvalitāti, neapdraudot nākamo paaudžu dzīves kvalitāti" (Pipere et al., 2015, 8). Kompetences jēdziens saistīts ar mācīšanas un mācīšanās pārorientēšanu uz ilgtspējīgu attīstību. 20. gadsimta 70. gados jēdziens *kompetence* tika lietots kā sinonīms vārdam *prasmes*, tad *kompetence kā kvalifikācija*, vēlāk *kompetence kā audzināšanas ideāls un analītiska kategorija* (Maslo & Tiļļa, 2005). Kompetenci definē arī kā *vairāku indivīdam raksturīgu komponentu sintēzi, kas ļauj iegūt pozitīvi vērtējamu darbības rezultātu* (Pipere et al., 2015, 10). Šobrīd Eiropā ir

DOI: http://dx.doi.org/10.17770/sie2016vol2.1383

aktuāla kompetenču pieejas ieviešana izglītībā (Eurydice, 2012). Latvijas Valsts pētījumu programmas projektā „Jaunā pedagoģija un kompetences attīstoša mācīšanās" paskaidrots, ka „kompetence ir indivīda spēja kompleksi lietot zināšanas, prasmes un attieksmes, risinot problēmas mainīgās reālās dzīves situācijās" (IZM, 2015, 4).

Viens no iemesliem kompetenču pieejas attīstīšanai Latvijā ir tāds, ka izglītības sistēmu kvalitātes mērīšanā OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development) organizētajos starptautiskajos salīdzinošajos izglītības pētījumos nozīmīgākais indikators ir skolēnu kompetences. Kompleksi tiek novērtēta skolēnu spēja izmantot zināšanas reālās dzīves situācijās. OECD SSNP 2012 (Starptautiskā skolēnu novērtēšanas programma) pētījumā Latvijas skolēnu vidējie sasniegumi matemātikas kompetencē nav statistiski nozīmīgi atšķirīgi no OECD valstu vidējā rādītāja, tomēr tikai 8 % Latvijas pamatskolēnu varējuši atrisināt augstāko 5. un 6. kompetenču līmeņa uzdevumus, bet 20 % skolēnu zināšanas atbilst 1. līmenim un pat zemāk (Geske et al., 2013, 25).

Pētījuma mērķis ir noskaidrot augstskolā studējošo tipiskās kļūdas par atsevišķiem skolā apgūtajiem matemātikas pamatjēdzieniem, kuru neizpratne rada problēmas turpmākā matemātikas kursa apguvē un citās dzīves situācijās. Par pamatjēdzieniem šajā rakstā tiks uzskatīti tie jēdzieni, kuru apguve tiek uzsākta pirmsskolā vai sākumskolā.

Tika veidots gadījuma pētījumu dizains (Pipere, 2011a; Geske & Grīnfelds, 2006), datu ieguvei izmantoti skolotāju un eksaktā virziena programmās studējošo DU studentu (n=224) mutvārdu un rakstveida pārbaudes darbi, laika posmā no 2012.- 2015. gadam. Pārbaudes darbi šajā pētījumā tiek vērtēti kā primārie dokumenti (Pipere, 2011b, 188). Dokumentu analīzē „pētnieks un metode veido vienotu veselumu" (Pipere, 2011b, 188), papildina viens otru, vadoties no docētāju vairāku gadu pieredzes gan skolā, gan augstskolā. Datu apstrādei izmantota kvalitatīvā kontentanalīze (Pipere, 2011c, 227). Rakstā aplūkotās problēmas ir aktuālas arī vispārizglītojošo skolu matemātikas skolotājiem, lai pievērstu uzmanību jēdzienu apguvei mācību procesā.

Skolas matemātikas kompetenču teorētiskie aspekti
Theoretical aspects of school mathematics competences

Matemātikā ir ieviesta precīzi organizēta jēdzienu sistēma (Godino, 1996, 3). Matemātikas kompetence, kas balstās uz šo jēdzienu sistēmu, ietver spēju matemātiski atklāt cēloņsakarības, matemātikas jēdzienu, darbību, faktu lietošanu, lai aprakstītu, izskaidrotu un prognozētu parādības un to norisi, tā palīdz cilvēkam saskatīt matemātikas lomu pasaulē un pieņemt labi pamatotus lēmumus (Geske et al., 2013, 15).

Kā atzīmē J. Mencis (sen.), ar jēdzienu tiek saprasts noteikta objekta (priekšmeta, parādības vai attiecību kopuma) atspoguļojums cilvēka apziņā (Mencis, 2014, 34). Savukārt, R. Fišers skaidro plašāk, ka jēdziens ir organizēta ideja; apzīmējumi, ko dodam idejām; jēdzieni palīdz klasificēt un sakārtot domas, pieredzi; jēdzieni ir cilvēka prāta struktūras, kas ļauj piešķirt jēgu pieredzei un mācīties no tās (Fišers, 2005b, 83). Ļ. Vigotskis izšķir divus jēdzienu attīstības līmeņus, no kuriem augstākais līmenis ir zinātniskie jēdzieni (Vigotskis, 2002). Šie jēdzieni ir teorētiski un strukturēti, un atkarīgi no valodas lietošanas un mācīšanās (Fišers, 2005b, 86). Jēdziena definīcijā atsaucas uz tuvāko ģints jēdzienu, lai izveidotos saskaņota jēdzienu sistēma, bet jēdziena saturā ietverams būtisko pazīmju apkopojums (Ģingulis, 2005). Pamatskolā lielākā daļa matemātisko jēdzienu netiek definēti, bet tikai iepazīti, akcentējot to pazīmes (Mencis, 2014, 35).

Tiek uzsvērts, ka tieši matemātikas jēdzienu neizpratne jau mācīšanās sākumposmā ietekmē studentu spējas augstākajā matemātikā un tai skaitā ģeometrijā, tā kā neizprotot matemātikas jēdzienus, studenti nevar pielietot zināšanas, lai risinātu jaunas matemātiskas problēmas (Arsaythamby et al., 2015; Kallia & Panagiotis 2010). Jo matemātikas jēdzienu (vārda jēgas) neskaidrības sekas ir nepārvaramas grūtības matemātisko apgalvojumu un to savstarpējo sakaru izpratnē un pielietošanā (Mencis, 1993). Jēdzienu izpratne ir būtiska arī ikdienā, piemēram, konstatēts, ka respondenti nepareizi saprot aptaujas jautājumu, ja aptaujā izmanto terminu tehniski korektā nozīmē, kas atšķiras no ikdienā lietotās nozīmes; cilvēkiem ir grūtības saprast šīs atšķirības, veicot klasifikāciju robežgadījumos (Tourangeau et al., 2006).

Jēdzienu apguvi ietekmē studentu pieredze par jēdziena lietošanu ikdienā (Shulman, 1986). Skolēniem ir vieglāk iegaumēt to jēdzienu, kas izprasts (Ģingulis, 2005; Mencis, 2014), ir jāprot nosaukt objektus, kas iekļaujas jēdziena ietvaros, gan arī tos, kuri tajos neiekļaujas (Fišers, 2005a, 189). Tātad, apgūstot jēdzienus matemātikā, skolēniem ieteicams tos iesaistīt konkrētos piemēros- nosaucot līdzīgus vai pretējus jēdzienus (Ģingulis, 2005; Mencis, 2014). Matemātika, atšķirībā no humanitāriem mācību priekšmetiem, ir kumulatīva (Dawkins, 2006). Lai sekmīgi apgūtu kādu jēdzienu, jāizprot iepriekš mācītie jēdzieni, jo jēdziens tiek pievienots jau esošajai jēdzienu sistēmai (Ģingulis, 2005, 34). Izšķiroša nozīme ir mācīšanas metodikai, ko bieži skolotāji nenovērtē. Galvenais nav matemātiskus jēdzienus iegaumēt bez jēgas, galvenā ir izpratne, uzskatāmais priekšstats.

Z. Usiskins studenta izpratni par matemātikas jēdzieniem un to lietošanu iedala piecās dimensijās (katru dimensiju var apgūt relatīvi neatkarīgi no citām):

- **algoritma dimensija** (*the skill algorithm dimension)*- prot praktiski pielietot algoritmu, kas saistīts ar jēdzienu;

- **pierādījuma dimensija** (*property-proof dimension*)- prot pierādīt, kāpēc var pielietot algoritmu;
- **modelēšanas dimensija** *(the use-application (modeling) dimension)* – lieto matemātikas jēdzienus šauri savām vajadzībām, ne obligāti izprotot tos, kā arī matemātisko teoriju par tiem;
- **reprezentācijas- metaforas dimensija** (*the representation- metaphor dimension)*- ir kaut kāda veida priekštats par jēdzienu- vieniem konkrēts objekts, citiem vizuāls attēls vai metafora;
- **vēstures- kultūras dimensija** *(history-culture dimension)*- izprot, kāpēc konkrētais jēdziens parādījās, kā tas attīstījās dažādās kultūrās (Usiskin, 2012).

Skaitlis (vesels skaitlis) ir matemātikas pamatjēdziens (Mencis, 1993), tas ir galīgu kopu apjoma mērs. Aritmētika un skaitļu teorija balstās uz spējām lietot skaitļu simbolisko pierakstu, cilvēku neverbālo spēju iztēloties un saprast skaitliskā daudzuma jēdzienu (Marmasse et al., 2000). Modernajā matemātikā skaitļu kopas tiek uzskatītas par vispārīgu algebrisku struktūru - gredzenu speciālgadījumu (Cohn, 2003). Pirmsskolā iepazīstina ar naturālu skaitli, kas raksturo reālu, diskrētu objektu kopas apjomu, skaitļiem ir konkrēta pieraksta sistēma (Brannon & Van de Walle, 2001; Carey, 2011; Ejersbo & Misfeldt, 2015; Mencis, 2014). Cipars ir grafiska zīme skaitļa pierakstīšanai. Naturāla skaitļa pieraksts ir atkarīgs no bāzes izvēlētajā pozicionālās skaitīšanas sistēmā, piemēram, binārajā skaitīšanas sistēmā, kas tiek plaši izmantota datorzinātnē, naturālu skaitli pieraksta, izmantojot tikai ciparus 0 un 1. J. Mencis (sen.) uzskata, ka skaitļa jēdzienu skolēni ir izpratuši, ja starp šī jēdziena izpausmēm trejādos aspektos (tēls- vārds- simbols) pastāv ciešas asociatīvas saites, turklāt abos virzienos (Mencis, 1993, 9). Skaitļa jēdziens bērna apziņā attīstās pakāpeniski, vadoties no viņu psiholoģiskās gatavības uztvert abstrakcijas, sākot no naturāliem skaitļiem un nulles līdz pat reāliem skaitļiem (Bass, 2015). Līdzās ievieš arī burtu kā nezināmo, kā mainīgo, kā vispārīgo skaitli. Svarīgi to veikt uzskatāmi, bērna uztverei atbilstoši. Mencis (sen.) mācību grāmatā „Algebra pamatskolai 1.daļa, 1.-5.§" (1994) 6. lappusē norāda, ka „burti matemātikā ir tas pats, kas notis mūzikā: pietiek izprast burtu valodu, un matemātika kļūst izdziedāma kā melodija". Arī notikuma varbūtība ir skaitlis, tas raksturo šī notikuma realizēšanās iespēju (Siliņa & Šteiners, 2006).

Nulli kā atsevišķu skaitli cilvēce izveidoja daudz vēlāk nekā citus skaitļus. Nulli var uzskatīt gan par matemātisku jēdzienu, gan par vispārkulturālu jēdzienu. Nulles izmantošana un izpratne var palīdzēt saprast sakarību starp jēdzienu un tā apzīmējumu (Cayton, 2008). Darbības ar nulli, kas ir īpašie gadījumi aritmētikā, daudziem sagādā grūtības.

Daļa skolēnu/studentu neizprot reizināšanas darbības jēgu. Kā norāda V.V. Davidovs, naturālu skaitļu reizināšana ir dabiski saistīta ar skaitīšanu (mērīšanu). Tā ir tādu vienību skaitīšana, kurai jau ir noteiktas attiecības pret citu, mazāku vienību. Piemēram, formulā $m \cdot n$, kuru lasa "pa m ņemt n reizes", pirmais reizinātājs m ir saskaitāmais, bet otrais n – šo vienību skaits (Давидов, 1969, 20). Citās Eiropas valstīs šo formulu raksta un lasa otrādi (latviski tas būtu, piemēram: piecreiz divi t.i. 2+2+2+2+2 jeb $5 \cdot 2$). Darbībai reizināt kādu skaitli ar īstu daļu ir cita jēga, tas nozīmē aprēķināt šīs daļas vērtību no dotā skaitļa, skaidro J. Mencis (sen.) u. c. mācību grāmatā „Matemātika 6.klasei" (1995). Rezultātā iegūstam mazāku skaitli, tātad atšķirīgi nekā reizinot ar naturālu skaitli.

Kļūdas definē kā neatbilstību kādām prasībām, normām, nosacījumiem (Prediger & Wittmann, 2009). Kļūdas ir dabisks mācīšanās starprezultāts. Svarīgi noskaidrot skolēnu kļūdu iemeslus un to izmantot mācību procesa uzlabošanai. G. Lāce savā pētījumā atgādina, ka kļūdas nav tikai skolēnu bezjēdzīgi mēģinājumi. Ja skolēns ir apguvis nepareizu stratēģiju, viņš jau to ir uztvēris kā derīgu. Lai to novērstu, skolēnam skolotāja vadībā būtu jāanalizē, kā kļūda radusies. Ļoti reti skolotāji pievērš uzmanību kļūdu cēloņiem. G. Lāces pētījumā tikai daži skolotāji pieprasa skolēniem veikt kļūdu labojumu. Būtu lietderīga tāda prakse, ka skolēni, labojot kļūdas, tās arī skaidrotu, vai aprakstītu, kāpēc viņu piedāvātais risinājums bija nepareizs. Stundu vērojumi un intervijas ar skolotājiem liecina, ka viņiem trūkst zināšanu par to, kā skolēns mācās un kāda ir kļūdu nozīme skolēna mācību procesā (Lāce, 2010).

Matemātikas pamatjēdzienu izpratnes tipisko kļūdu analīze
Analysis of typical errors in comprehension of basic mathematical concepts

Iegūto datu kvalitatīvās kontentanalīzes rezultātā, autori sistematizēja studējošo mutvārdu un rakstveida pārbaudes darbos novērotās kļūdas par matemātikas jēdzienu satura izpratni nosacīti pēc to iespējamajiem cēloņiem:

- **termina lietošanas atšķirības zinātnē un sadzīvē:**
  - par derīgiem pieņem semantiski nekorektus lietošanas piemērus, kas tiek lietoti sadzīvē, reklāmās, piemēram, *cipars 117*;
  - neprot saskatīt praktiskas asociācijas, piemēram, *svara pieaugums- argumenta pieaugums*, *pretējais skaitlis, apgrieztais skaitlis;*
- **jēdzienu sistēmas un savstarpējo sakarību izpratnes grūtības,** ģints jēdziena un apakšjēdzienu noteikšana jēdziena definīcijā *(taisnstūris- kvadrāts; rombs– kvadrāts, skaitlis- varbūtība, nelineāra funkcija- logaritmiskā funkcija*);

- **kļūdaina pārnese pēc analoģijas, izņēmuma gadījumu neievērošana** (*kļūdas aritmētiskās darbībās ar nulli*);
- **vizualizācijas grūtības**, trūkst uzskatāma, vizuāla priekšstata par jēdzieniem; piemēram, *kopu operāciju vizualizācija, kombinatorikas metožu vizualizācija, ģeometrisko jēdzienu vizualizācija – perimetrs un laukums; skaitlis un tā ģeometriskā interpretācija, citi jēdzieni, kas saistīti ar Dekarta un citām koordinātu sistēmām*;

Nav iespējams kvantitatīvi raksturot pieļautās kļūdas pēc to cēloņiem, jo tas nav nosakāms viennozīmīgi. Autori neanalizē kļūdas, kuru cēlonis varētu būt saistīts ar studentu psiholoģiska rakstura īpatnībām (uztveri, atmiņu, iegaumēšanu u.c.), vai ar skolotāju profesionalitāti, mācību grāmatu kvalitāti, lai gan mācību procesā, tas nav atdalāms. Konkrētam skolēnam/studentam kļūdas saistībā ar matemātikas jēdzienu izpratni un tā lietošanu var būt dažādu iemeslu dēļ. Augstskolas studentu kļūdas parādās vairākās jēdzienu izpratnes un lietošanas dimensijās, tās izpaužas studējošo nespējā atbildēt uz jautājumiem par objektu, kas saistīts ar jēdzienu, piemēram, pie kādiem nosacījumiem objekts var pastāvēt, kādas īpašības piemīt objektam, kādas matemātiskās operācijas var veikt ar objektu, kādiem mērķiem objektu var izmantot. Studentu tipisko kļūdu par matemātikas jēdzienu izpratni analīze un kļūdu novēršanas iespējas aplūkotas, vadoties no tematiskā sakārtojuma: skaitļi, matemātiskās darbības, ģeometrijas elementi, akcentējot tos jēdzienus, kurus sāk apgūt pirmsskolā un sākumskolā, tomēr nesaprot vēl augstskolā.

Skaitlis un cipars. Cipara un skaitļa jēdzienu ievieš pirmsskolā, bet attīsta sākumskolā. Tomēr kļūdas šo jēdzienu lietošanā gadu no gada vērojamas gan studentu mutvārdu atbildēs, gan topošo skolotāju stundu konspektos, gan prakses stundās. Tas apliecina, cik noturīgi ir bērnībā gūtie priekšstati. Kļūdas pārmantojas no paaudzes paaudzē, jo nepareizi to lieto gan mājās, gan dažādos medijos- vecāki, žurnālisti, Saeimas deputāti u.c. Tipiskākās kļūdas: daži studenti ciparus neuzskata par skaitļiem; daudzus skaitļus nepareizi sauc par cipariem (pareizi: tikai viencipara skaitļi ir gan cipari, gan skaitļi vielaicīgi); bieži uzskata, ka 10 ir cipars (pareizi: 10 nav cipars, bet ir skaitlis, ko pieraksta ar diviem cipariem). Matemātiskās darbības izpilda ar skaitļiem, nevis ar cipariem. Lai studenti/skolēni labāk izprastu jēdzienu *skaitlis un cipars* atšķirību, var dot uzdevumus, kuros tiek izmantoti abi jēdzieni. Piemēram, uzdevumi kombinatorikā. 2. klasē- *uzraksti visus divciparu skaitļus, kuros ir cipari 2, 4, 6!* Vidusskolā- *cik daudz pāra piecciparu skaitļus var izveidot no cipariem 0, 1, 2, 3, 4, 5 un 6, ja cipari skaitlī nevar atkārtoties?*

Tāpat lietderīgi noskaidrot objektus, kas iekļaujas un kas neiekļaujas konkrētā jēdziena ietvaros. Piemēram, telefona numurs, kas atbilst Latvijā izmantotajai *astoņzīmju* (astoņciparu) numerācijai, nav ne skaitlis, ne cipars, bet ir ciparu virkne. Arī dažādu biļešu numuru apzīmējumi var būt ciparu virkne.

Mūsdienās ciparu virknes tiek plaši izmantotas daudzās jomās, no parolēm un kodiem līdz darba devēju testiem. Apskatīsim šādu testu: zināms, ka *5+3+2=1510; 9+2+4=1836; 8+6+3=4824; 5+4+5=2025; cik būs 7+2+5=?* Risinājums: šajā testā simbolu + un = nozīmes neatbilst standartnozīmēm; pirmajām trim vienādībām $x + y + z = abcd$ standartnozīmē izpildās sakarības $x \cdot y = \overline{ab}$ un $x \cdot z = \overline{cd}$, tādējādi šī testa atbilde „7+2+5=1435”. Kļūdaina pieeja, risinot šo testu, būtu uzskatīt ciparu virknes vienādības labajā pusē par decimālajiem skaitļiem. Tāpat kā jebkuri simboli, arī matemātiskie simboli var tikt izmantoti vairākās nozīmēs. Tas jāpaskaidro skolēniem/studentiem.

Skaitļu kopās ir divas pamatoperācijas- saskaitīšana un reizināšana. Skaitļa inversais skaitlis attiecībā uz katru operāciju tiek saukts savā vārdā, attiecīgi ***pretējais*** *skaitlis un* ***apgrieztais*** *skaitlis*. Daži studenti jauc šos jēdzienus. Lai atcerētos terminu apgrieztais un pretējais skaitlis noteikšanas algoritmu, studentiem lietderīgi izsaukt praktiskas asociācijas. *Apgrieztais skaitlis* saistīts *ar saucēja un skaitītāja maiņu vietām, bet* dzīvē to varētu asociēt ar procesu - *apgriezt pankūku otrādi*. *Pretējais skaitlis* saistīts *ar skaitļa izvēli pretējā pusē no 0 uz reālo skaitļu taisnes,* dzīvē to varētu asociēt ar uzdevumu atrast *pretējo virzienu (plus-mīnus)*. Skaitlim 0 *apgrieztais skaitlis neeksistē,* bet *pretējais skaitlis ir 0.* Savukārt, neitrālais elements attiecībā uz saskaitīšanu ir 0, bet attiecībā uz reizināšanu ir 1. Ja students uzskata, ka skaitlis 0 ir „tukšums”, tāpēc to var nerakstīt, rodas kļūdas skaitļošanā: $0 \cdot 5 = 5$. Šeit kļūdas cēlonis var būt vadīšanās pēc analoģijas ar saskaitīšanas gadījumu (0+5=5), nepareizi uzskatot, ka skaitlis 0 ir neitrālais elements attiecībā pret reizināšanu. Kļūdainā pierakstā 1+x=x tieši otrādi- skaitlis 1 tiek nepareizi uzskatīts par neitrālo elementu attiecībā uz saskaitīšanu, kuru var nerakstīt, tāpat kā vienādībā 0+x=x.

Skaitlis un cipars nulle. Tipiska kļūda: reālu skaitli, izdalot ar nulli, atbilde ir 0. Veicot aprēķinus ar kalkulatoru par dalīšanu ar 0, rezultātā var iegūt bezjēdzīgas atbildes (Dawkins, 2006). Jāatceras, ka dalīšana ar 0 nav definēta, arī 0:0 nav definēts. Cita kļūda: dalījumā pazūd nulles, piemēram, nepareizi raksta, ka 714:7=12, 12060:3=42. Citi uzskata, ka nulle nav ne pāru, ne nepāru skaitlis. Šīs kļūdas novēršanu skolas mācību procesā var veikt, aktualizējot dalāmības pazīmi ar 2, kas nosaka, ka “*ja veselais skaitlis dalās ar 2 (bez atlikuma), tad tas ir pāru skaitlis”*. Vēl nozīmīgāk būtu iesaistīt skolēnus vadītā meklējumdarbībā, lai viņi paši nonāktu pie pareizā secinājuma.

Daļa studentu neuzskata **notikuma varbūtību** par skaitli, bet par „*iespēju, ka notikums notiks*”, vai pat „*kaut kas, kas būs un kas nebūs”.* Tipiskā kļūda- nosakot notikuma A varbūtību P(A)=m/n, dalījumam aprēķina skaitītāju m, bet saucēju n aizmirst pierakstīt. Lai novērstu šo kļūdu, ieteicams pārbaudīt, vai notikuma varbūtība pieder intervālam [0;1]. Studentu grūtības statistisko jēdzienu izpratnē un to novēršanas rekomendācijas apskatītas rakstā (Sondore & Daugulis, 2014).

Īpaši aktuāla ir **reizināšanas darbības jēgas izpratne.** Tas izpaužas nespējā iegaumēt reizināšanas tabulas sakarības. Noskaidrojot reizināšanas darbības jēgu (ja reizina veselus skaitļus, reizināšana ir vienādu saskaitāmo saskaitīšana), jāakcentē uzmanība atbilstošajai skaitīšanas vienībai (Давидов, 1969). Reizināšanas darbību var ilustrēt arī ar tabulas elementu skaita aprēķināšanu kā tabulas rindu un kolonnu skaita reizinājumu. Darbā ar reizināšanas tabulu izmantojami daudzveidīgi metodiskie paņēmieni. Reizināšanas sakarību izpratni var panākt ar uzskatāmu darbību.

Studējošo **skaitļošanas kļūdas** rodas no nepietiekami veiklas galvas rēķinu prasmes, arī neprasmes aptuveni novērtēt rezultāta pareizību. Viens no iemesliem ir studentu paļaušanās uz kalkulatoriem. Otrs– nepietiekama vingrināšanās, kas attīsta prāta slinkumu. Veiklas skaitļošanas prasmes galvā ir viena no cilvēkam nepieciešamām dzīves prasmēm. Skaitļošanas sakarību iegaumēšanai būtu aktivizējamas dažādas aizraujošas skaitļošanas datorspēles, telefonspēles. Tas apliecina emociju nepieciešamību kompetenču apguvē.

Izteiksme, **vienādība, nevienādība, vienādojums.** Izteiksmes un vienādības jēdziens tiek ieviests sākumskolā. Izteiksme ir dažādu operāciju vairākkārtīgas formālas pielietošanas rezultāts skaitļiem vai burtiem. Apgalvojumu par divu vai vairāku izteiksmju salīdzināšanu sauc par vienādojumu vai nevienādību. Daži skolēni un studenti neievēro, ka vienādību, vienādojumu, nevienādību nevar saukt par izteiksmi. Vienādība rodas, ja *divas izteiksmes* savieno ar vienādības zīmi. Skolēni/studenti neuztver, ka arī atsevišķs skaitlis un burts ir izteiksme. Arī 18:0 ir izteiksme, lai arī tai nav jēgas.

Aritmētisko simbolu lietošana. Tipiski, ka studenti, lai īsāk noformētu uzdevuma nosacījumus, veido nepareizus pierakstus, liekot zīmi = starp dažādas dabas objektiem. Arī sadzīvē vērojami matemātiski nekorekti pieraksti, piemēram, veikalu reklāmavīzē 1kg = € 2,58, ar to domājot, ka 1 kg produkta maksā 2,58 eiro. Nedrīkst likt vienādības un aritmētisko operāciju zīmes starp dažāda tipa matemātiskiem un fizikāliem lielumiem. Piemēram, nevar rakstīt *2+3=5 eiro,* jo, saskaitot skaitļus, iegūst skaitli 5 nevis lielumu *5 eiro*. Šajā gadījumā mērvienību nosaukums jāliek iekavās. Bieži skolotāji šo skolēnu nepilnību nelabo, un tas veidojas kā paviršības paradums. Jebkuri simboli un zīmējumi, kas tiek izmantoti, piemēram, šādā veidā, ooo + o = ?, ir jāuztver kā vispārīgs skaitlis, kura vietā var likt dažādus skaitļus. Ja simbola o vietā liek 1, summā iegūstam 112, nevis 4, kā gaida pirmsskolas skolotājs. Liekot simbola o vietā citus skaitļus, iegūst citu rezultātu.

Riņķis, aplis. Pirmsskolā bieži ģeometrisko figūru riņķi sauc par apli. Pareizi- ģeometriskā figūra ir riņķis, (aplis ir ienācis no senāk latviski lietotā vārda *aploce).* Ikdienā termins *aplis* tiek lietots, piemēram, sakot "sastāties aplī", ar brīvu roku var zīmēt apļus vai aplīšus utml.

Taisnstūris, kvadrāts. Nepareiza šo jēdzienu ieviešana bērnudārzā rada neizpratni par četrstūru klasifikāciju pat augstskolu studentiem. Bērnudārzā daudzi skolotāji akcentē uzmanību četrstūru malām, sakot, ka taisnstūrim *„divas pretējās malas ir vienādas*" (t.i. paralelograms), bet kvadrātam "*visas malas ir vienādas*" (t.i. rombs). Jau 2. klases mācību grāmatā kvadrāta definīcija nosaka, ka "*kvadrāts ir taisnstūris*, kuram visas malas vienādas". Tomēr daļa skolēnu, topošo un esošo pirmsskolas skolotāju neatzīst kvadrātu par taisnstūri, jo viņu uztverē nav akcentēta taisnstūra būtiskā pazīme– taisnais leņķis.

Daļa jēdzienu nav nostiprināta loģiskā atmiņā. Piemēram, pat studentiem jūk jēdzieni taisnstūra **perimetrs** un **laukum**s, tāpēc sākumskolā līdzās teorētisku uzdevumu risināšanai nepieciešami praktiskie darbi, mērot un aprēķinot perimetru, laukumu dzīves situācijās. Tāpat grūti ir panākt studentu izpratni par to, ko nozīmē *laukumu mērīt* un ko nozīmē *laukumu aprēķināt*.

Mērvienību pieraksta nepilnības. Tekstā nevar lietot mērvienību apzīmējumus bez skaitliskās vērtības, piemēram: *Cik kg ābolu kastē*? Teikumā *kg* vietā jāraksta pilns vārds *kilogramu*. Toties atbildē "*Kastē ir 5 kg ābolu*." apzīmējums lietots pareizi. Līdzīgi tas attiecas uz jebkuru saīsinājumu lietošanu tekstā. Piemēram, ar burtu c var saprast gan romiešu skaitli (atbilst arābu skaitlim 100), gan centnera apzīmējumu, gan centa saīsinājumu.

Studiju procesā, arī profesionālās pilnveides kursos svarīgi pievērst skolotāju, uzmanību darbam ar jēdzieniem, domājot par vārdu semantisko jēgu, jēdzienu savstarpējo saistību noskaidrošanu, jēdzienu iegaumēšanas paņēmieniem un izpratnes nostiprināšanu praktiskā darbībā, izmantojot dažādus miniprojektus. Tas palīdzētu izskaust formālismu jēdzienu apguvē. Nedrīkst par derīgiem pieņemt matemātiski nekorektus piemērus, kas tiek lietoti sadzīvē, reklāmās utml.

Secinājumi
Conclusions

Lai topošiem skolotājiem veidotos matemātiskā kompetence ir nepieciešama nekļūdīga pamatjēdzienu izpratne. Pamatjēdzienu izpratne īpaši aktuāla ir sākumskolā, lai nepareizība nenostiprinātos apziņā, kuru vēlāk grūti labot. Darbā ar pamatjēdzieniem vērā ņemamas psihologu atziņas par uztveri, atmiņu, iegaumēšanu u.c.

Pētījums parāda, ka daudzas kļūdas par pamatjēdzienu izpratni skolas matemātikas kompetenču apguvē atkārtojas gadu no gada. Organizējot profilaktisko darbu kļūdu novēršanai, katras tēmas sākumā ir svarīgi pievērst skolēnu/studentu uzmanību darbam ar jēdzieniem, konkrēti, jēdzienu savstarpējo sakarību izpratnei, izņēmuma gadījumu analīzei, jēdzieniem atbilstošā vizuālā priekšstata izveidei, kā arī terminu lietošanas atšķirībām zinātnē un sadzīvē.

Kompetenču pieejā pievēršama uzmanību ne tikai mācību rezultātiem, bet arī mācību procesam. Skolotājiem gan skolā, gan augstskolā svarīgi veidot paradumu savlaicīgi analizēt gan savas, gan skolēnu/studentu kļūdas, nosakot šo kļūdu cēloņus, kas palīdzētu mācīšanās procesā tās jau savlaicīgi novērst, izvēloties skolēnu/studentu vecumam atbilstošas metodes un paņēmienus.

Summary

In order to ensure sustainable development towards a knowledge, skill and innovation bases economy, inportance of basic competences is steadily increasing. The most important indicator in international studies organized by OECD for comparing education are competences of school students. According to the 2012 study average results of Latvian students are not statistically significantly different from the average of OECD countries, although only 8 % of students could solve problems of the highest competence level, but results of 20 % of students correspond to the 1st level or are below it (Geske et al., 2013, 25). Mastering of mathematical competences include understanding and usage of mathematical concepts. Mathematics is a logically organized conceptual system (Godino, 1996, 3) and a failure to understand mathematical concepts at early stages of learning influences student abilities in higher mathematics including geometry (Arsaythamby et al., 2015; Kallia & Panagiotis, 2010).

A case study design was used (Pipere, 2011a; Geske & Grīnfelds, 2006), for data acquisition authors used oral and written test results of students of Daugavpils University enrolled in teaching and natural sciences study programs (n=224), in 2012-2015. Typical errors related to concepts which are introduced in preschool and elementary school are analyzed in this article, as well as possibilities of their elimination. They are grouped according to themes: numbers (number and digit), mathematical operations (expression, equality, equation, multiplication, computation, probability), elements of geometry (circle, rectangle, square, polygon perimeter and area) as well as some defects of mathematical notations.

Based on qualitative content analysis of the obtained data, authors systematized the observed errors concerning error causes of understanding of contents of mathematical concepts depending on their possible reasons. The following classes were found: **different meanings of terms in science and everyday life** (mathematically incorrect examples are accepted, practical associations are not observed); **difficulties of understanding of relations between the concepts and their system** (difficulties in determing general and special cases); **fallacious usage of analogy, neglection of exceptional cases**; **visualisation problems** (the lacking of visual perceptions of concepts). It is impossible to characterize the errors quantitatively with respect to their causes since these are not determined uniquely. Students may have mathematical concept understanding errors for various reasons.

Conclusions. A correct understanding of basic concepts is necessary in order to form mathematical competence of future teachers. Understanding of basic comtepts is especially important in elementary school since it is important not to form erraneous concepts in conscience which is hard to repair later. Working with basic concepts it is useful to take into account opinions of psychologists about perception, memory, memorization etc.

The study shows that many errors related to perception of basic concepts in the process of learning competences of school mathematics get repeated every year. Organizing profilactic work for error elimination, in the beginning of every theme it is important to draw students' attention to the concepts, specifically, to understanding relations between concepts, analyses of exceptional cases, developing of visual images corresponding to the concepts as well as different usages of terms in scientific and everyday language.

In competence approach it is necessary to pay attention to both learning results and the learning process itself. It is important for teachers both in school and university to build a habit to analyze without delay student's errors and one's own errors, to find causes of these errors, which should help to eliminate them promptly by choosing methods and approaches suitable for the age of students.

References

Arsaythamby, V., Hariharan, N. K., & Wan Shahida Wan, A. (2015). Types of Student Errors in Mathematical Symbols, Graphs and Problem-Solving. *Asian Social Science,* 11 (15)**,** Downloaded from https://www.questia.com/library/journal/1P3-3739558531/types-of-student -errors-in-mathematical-symbols-graphs

Bass, H. (2015). Quantities, numbers, number names, and the real number line. In: Sun, X., Kaur, B., Novotná, J. (Eds.). *Conference Proceedings of ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers,* 10-20, Macao, China. Downloaded from http://www.umac.mo/fed/ICMI23/doc/Proceedings_ICMI_STUDY_23_final.pdf

Brannon, E. M., & Van de Walle, G. A. (2001). The development of ordinal numerical competence in young children. *Cognit Psychol,* 43 (1), 53-81. Downloaded from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11487294

Carey, S. (2011). Concept innateness, concept continuity, and bootstrapping. *Behavioral and Brain Sciences,* 34, 152–167. Downloaded from https://software.rc.fas.harvard.edu/lds/wp-content/uploads/2012/04/Carey-2011-BBS.pdf

Cayton, G. A. (2008). Number concept: theoretical and empirical views of number processing. *A Qualifying Paper for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics Education*. Tufts University. Downloaded from https://dl.tufts.edu/catalog/tufts:UA071.001.001.00014.00002

Cohn, P. M. (2003). *Basic algebra: groups, rings, and fields*. New York: Springer.

Dawkins, P. (2006). *Common Math Errors*. Paul's Online Math Notes. Downloaded from https://faculty.smu.edu/tcarr/paul-dawkins-common-math-errors.pdf

Ejersbo, L. R., & Misfeldt, M. (2015). The relationship between number names and number concepts. In: Sun, X., Kaur, B., Novotná, J. (Eds.). *Conference Proceedings of ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers*, 84-91, Macao, China. Downloaded from http://www.umac.mo/fed/ICMI23/doc/Proceedings_ICMI_STUDY_23_final.pdf

Eurydice (2012). Eiropas Komisija/*EACEA*/*Eurydice*. Galveno kompetenču pilnveide Eiropas skolās: rīcībpolitikas uzdevumi un iespējas. *Eurydice ziņojums.* Luksemburga: ES Publikāciju birojs. Pieejams: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents /thematic_reports/145LV.pdf

Fišers, R. (2005a). *Mācīsim bērniem domāt*. Rīga: Raka.

Fišers, R. (2005b). *Mācīsim bērniem mācīties*. Rīga: Raka.

Geske, A., & Grīnfelds, A. (2006). *Izglītības pētniecība.* Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.

Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., & Kiseļova, R. (2013). *Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā 2012 – pirmie rezultāti un secinājumi*. Rīga: Latvijas Universitātes Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultātes Izglītības pētniecības institūts. Pieejams http://www.ipi.lu.lv/fileadmin/_migrated/content_uploads/Latvija_SSNP_2012_pirmie_rezultati_un_secinajumi.pdf

Godino, J. D. (1996). Mathematical Concepts, their Meanings, and Understanding. In: Puig, L., Guitiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 307–314, Valencia, Spain. Downloaded from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.455.7485&rep=rep1&type=pdf

Ģingulis, E. (2005). *Kā saprast un iemācīties matemātiku*. Rīga: Raka.

IZM (2015). 8.3.1. specifiskā atbalsta mērķa „Attīstīt kompetenču pieejā balstītu vispārējās izglītības saturu" 8.3.1.1. pasākuma „Kompetenču pieejā balstīta vispārējās izglītības satura aprobācija un ieviešana" SĀKOTNĒJAIS NOVĒRTĒJUMS. 2015. marts. Pieejams http://komitejas.esfondi.lv/Shared Documents/IZM_SN_8311_precizets_12052015.doc

Kallia, M., & Panagiotis, S. (2010). The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: how the concept of similarity and intuitive knowledge affect student' s perception of similar shapes. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France, 736-745. Downloaded from http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-07-mattheou-panagiotis.pdf

Lāce, G. (2010). Latvijas pamatskolas matemātikas skolotāju kompetence matemātikas didaktikā. *Disertācijas kopsavilkums Doktora zinātniskā grāda iegūšanai matemātikā*. Rīga. Pieejams http://www.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/zinas/kopsavilkums_latv_LaceG.pdf

Maslo, I., & Tiļļa, I. (2005). Kompetence kā audzināšanas ideāls un analītiska kategorija. *Skolotājs*, 3, 4-9 lpp.

Marmasse, N., Bletsask, A., & Marti, S. (2000). *Numerical Mechanisms and Children's Concept of Numbers*. Downloaded from http://web.media.mit.edu/~stefanm/society/som_final.html

Mencis, J. (2014). *Matemātikas metodika pamatskolā*. Rīga: Zvaigzne ABC.

Mencis, J. (1993). Matemātikas mācīšanas metodiskā sistēma pamatskolā. Kopsavilkums par pedagoģiski zinātnisko darbību matemātikas metodikā pēc 1977. gada (pretendējot uz Dr.habil. grāda iegūšanu pedagoģijā). *Profesors Jānis Mencis (1914-2011). Bibliogrāfija.* Liepāja, 2014, 7-27 lpp.

Pipere, A. (2011a). Kvalitatīvo pētījumu dizainu veidi. Sastādīja Martinsone, K. *Ievads pētniecībā: stratēģijas, dizaini, metodes*. Rīga: Raka, 90-105. lpp.

Pipere, A. (2011b). Datu ieguves metodes pētījumā un to analīze. Sastādīja Martinsone, K. *Ievads pētniecībā: stratēģijas, dizaini, metodes*. Rīga: Raka, 157-192. lpp.

Pipere, A. (2011c). Datu analīze kvalitatīvajā pētījumā. Sastādīja Martinsone, K. *Ievads pētniecībā: stratēģijas, dizaini, metodes*. Rīga: Raka, 220-243. lpp.

Pipere, A., Iliško, Dz., & Mičule, I. (2015). Ilgtspējīga attīstība – no zināšanām uz darbību. *Palīgs skolām un skolotājiem*. Daugavpils: DU apgāds "Saule".

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen– (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik in der Schule,* Heft 27, 1-12. Downloaded from http://www.schulentwicklung.nrw.de/angebote/materialdatenbank/upload/2507/864671_3_2_4_PM_27_09__Fehler.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 16* (2), 4-14. Downloaded from http://lchc.ucsd.edu/mca/Mail/xmcamail.2015-04.dir/pdfpRSc5p4oW_.pdf

Siliņa, B., & Šteiners, K. (2006). *Rokasgrāmata matemātikā*. Rīga: Zvaigzne ABC.

Sondore, A., & Daugulis, P. (2014). Difficulties in understanding statistical concepts for University students. *Proceedings the 15 th International Conference "Teaching Mathematics: Retrospektive and Perspektive"*, 102-109, Liepaja: Liepaja University.

Tourangeau, R., Conrad, F., Arens, Z., Fricker, S., Lee, S., & Smith, E. (2006). Everyday Concepts and Classification Errors: Judgments of Disability and Residence. *Journal of Official Statistics.* 22 (3), 385-418. Downloaded from http://www.jos.nu/Articles/abstract.asp?article=223385

Usiskin, Z. (2012). What does it mean to understand some mathematics? *12th International Congress on Mathematical Education*. 1-20, Seoul, Korea. Downloaded from http://www.icme12.org/upload/submission/1881_f.pdf

Vigotskis, Ļ. (2002). *Domāšana un runa.* Madona: EVE.

Давидов, В.,В. (1969). Психологический анализ действия умножения. *Психологические возможности младших школьников в усвоении математики.* Под ред. Давидов, В.,В. Москва: Просвещение, c. 10– 75.